Analyse Métrique des Préférences

Georges Le Calvé
Université de Rennes 2
5 Avenue Gaston Berger 35043
Rennes France
g.lecalve@infonie.fr

1 Introduction

On sait que, à tout espace normé, on peut associer un espace métrique: il suffit de prendre comme distance entre deux points la norme du vecteur différence. Inversement, certaines distances, nommées Euclidiennes, peuvent être associées à une norme dérivant d'un produit scalaire, toujours par l'intermédiaire du vecteur différence. Il existe donc bien, dans certains cas, une relation entre espaces normés et espaces métriques, relation non symétrique d'ailleurs.

On peut également considérer qu'un espace vectoriel de dimension 1, c'est à dire un axe, induit un ordre sur les points. L'analyse ordinale a comme but essentiel de rechercher un tel axe, ou l'ordre qu'il induit, en respectant au mieux les préférences émises. Comme on peut présenter l'Analyse en Composantes Principales comme la recherche d'un espace de dimension restreinte et fixée, respectant au mieux les similarités (produits scalaires), on voit le lien entre ACP et Analyse Ordinale. Le positionnement multidimensionnel cherche lui à construire des espaces, non nécessairement Euclidiens, respectant au mieux les distances. Les liens unissant ACP et positionnement multidimensionnel, ou encore similarités et dissimilarités, ont déjà été étudiés sous le nom de *fonctions de similitude.*

Pour conclure, on peut dire que l'analyse ordinale cherche à extraire une matrice triangulaire qu'elle privilégiera, considérant sa symétrique comme nulle; tandis que l'analyse ordinale que nous proposons accordera autant d'importance aux deux parties de la matrice, estimant qu'elles sont également porteuses d'information

2 Définitions

Soit E un ensemble de cardinal n

Similarité

On appelle similarité sur E une matrice carrée $S_{n \times n}$ vérifiant

i) $S_{ij} \geq 0$ ii) $S_{ij} = S_{ji}$ iii) $S_{ii} \geq S_{ij}$

Dissimilarité

On appelle dissimilarité sur E une matrice carrée $D_{n \times n}$ vérifiant

i) $D_{ij} \geq 0$ ii) $D_{ij} = D_{ji}$ iii) $D_{ii} \geq 0$

Elle est dite propre si $D_{ij} = 0$ entraîne i = j

Distance

Une distance est une dissimilarité propre vérifiant de plus l'inégalité triangulaire:

$$D_{ij} + D_{jk} \geq D_{ik}$$

Préférence

On appelle préférence stricte une matrice $P_{n \times n}$ vérifiant

i) $P_{ij} \geq 0$ ii) $P_{ii} = 0$

On appelle préférence au sens large une matrice $P_{n \times n}$ vérifiant

i) $P_{ij} \geq 0$ ii) $P_{ii} \geq P_{ij}$

Par exemple une relation d'ordre est une préférence stricte, tandis que un préordre est une préférence au sens large.

3 Relations de concordance de type Minkovsky

Soient S une similarité, D une dissimilarité et P une préférence sur un ensemble E. On dit que les relations de concordance sont de type Minkovsky,de paramètres M et r, si il existe un point M de E et un réel positif r tels que

$S_{ij} = 1/2\,(D^r_{Mi}+D^r_{Mj}-D^r_{ij})$ $\qquad D^r_{ij} = S_{ii} + S_{jj} - 2S_{ij}$ $\qquad D^r_{ij} = P^r_{ij} + P^r_{ji}$

Si X est un tableau contenant des évaluations numériques de produits par des juges,

$P_{A,B} = (\Sigma(a_i - b_i)^{+p})^{1/p}$ $\qquad P_{B,A} = (\Sigma(b_i - a_i)^{+p})^{1/p}$

où $(a_i - b_i)^+$ désigne la partie positive de $(a_i - b_i)$

4 Analyse des préférences

On suppose donnée une matrice P de préférences, et on désire la représenter « au mieux »dans des espaces adaptés. Plusieurs critères sont possibles.

Critère $Pref_0$

On cherche K axes de préférences, chacun représentant un ordre sur les produits, de poids α_k, avec X_{ik} coordonnée du produit i sur l'axe k, et tels que $\Sigma_{ij}\ |\ P_{ij} - \Sigma_{k=1}\, \alpha_k\, (X_{ik} - X_{jk})^{+0}\ |$ soit minimum. L'exposant 0 a comme conséquence de chercher des ordres tels que le nombre de fois où le produit i a été jugé meilleur que le produit j est le plus proche possible des préférences données.

Une alternative consiste à optimiser le critère Pref1 défini comme$\Sigma_{ij}\ |\ P_{ij} - \Sigma_{k=1}\, \alpha_k\, (X_{ik} - X_{jk})^{+}|$ minimum.

Ces deux critères sont des cas particuliers non symétriques du problème de MDS L_1 à savoir

$\Sigma_{ij}\ |\ P_{ij} - \Sigma_{k=1}\, \alpha_k\, |X_{ik} - X_{jk}\,|\,|$

Ces critères sont optimisés à l'aide d'exploration systématique d'arbres et de procédés d'élagage de certaines branches. Ils sont efficaces et rapides jusqu'à environ douze produits, ce qui est suffisant.

La méthode est appliquée à un exemple de l'industrie automobile, portant sur le confort postural des sièges

Résumé

La notion de préférence collective se trouve dans de nombreux problèmes tels l'Analyse Ordinale ou l'Analyse Sensorielle. Sur le plan mathématique on peut la présenter comme une notion de distance, ou plutôt de dissimilarité non symétrique. Après avoir défini la notion de préférence de Minkovsky, en analogie avec les distances du même type, nous montrons que l'on peut étendre à ce type de distance non symétrique la problématique et les algorithmes du Multidimensional Scaling. En particulier nous fournissons des algorithmes optimaux pour une analyse métrique en norme L_1, et une autre pour une analyse en norme L_0, débouchant sur des analyses ordinales simultanées. Un exemple est traité.

Summary

The collective preference notion is found in many problems such as Ordinal Analysis or the Sensory Analysis. From a mathematical point of view one can present it as a notion of distance, or rather of dissimilarity, non symmetrical. After having defined the notion of Minkovsky's preference, in analogy with distances of the same type, we show that one can spread to this type of non symmetrical distance the problematical and algorithms of the Multidimensional Scaling. Especially we provide optimal algorithms for a metric analysis in norm L_1,and an other for an analysis in norm L_0, opening on simultaneous ordinal analysis. An example is processed.